

RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEL LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

Seduta del 2 febbraio 1902.

P. BLASERNA, Vicepresidente.

MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

Matematica. — *Una estensione del metodo di Eulero-Laplace per l'integrazione di una classe di equazioni a derivate parziali del secondo ordine.* Memoria del Socio ULISSE DINI.

Questo lavoro sarà pubblicato nei volumi delle Memorie.

Meccanica. — *Sul principio delle immagini di Thomson e le equazioni dell'elasticità.* Nota del Corrisp. C. SOMIGLIANA.

Geologia. — *I terreni eocenici presso Bribir in Croazia* Nota del Socio C. DE STEFANI e del dott. G. DAINELLI.

Le due precedenti Note saranno pubblicate nel prossimo fascicolo.

Matematica. — *Rappresentazione di una forma qualunque per combinazione lineare di più altre.* Nota di FRANCESCO SEVERI, presentata dal Socio C. SEGRE.

La ricerca delle condizioni perchè una forma, particolarmente ternaria, si possa esprimere come combinazione lineare di altre due forme date, ha occupato molti geometri, e fra i più insigni.

Ai noti lavori, fondamentali, di Nöther, han fatto seguito altri (di Nöther stesso, di Voss, Stickelberger, Zeuthen, Bertini, Brill, ecc.) nei quali il problema fu considerato dal punto di vista puramente algebrico ed anche sotto altri aspetti.

Recentemente nei *Mathematische Annalen*, i quali accolsero la maggior parte dei lavori precedenti, vide la luce una breve Nota della sig.^{na} Scott ⁽¹⁾, nella quale è dimostrato il « *Fundamentalsatz* » di Nöther, per le forme ternarie, con mezzi molto semplici.

1. Date $h (\leq r)$ forme F_1, F_2, \dots, F_h delle $r+1$ variabili x_0, x_1, \dots, x_r , supposto che le equazioni

$$(1) \quad F_1 = 0, \dots, F_h = 0, \quad \left\| \begin{array}{cccc} \frac{\partial F_1}{\partial x_0} & \dots & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial F_h}{\partial x_0} & \dots & \dots & \frac{\partial F_h}{\partial x_r} \end{array} \right\| = 0$$

abbiamo meno che ∞^{r-h} soluzioni comuni, trovare le condizioni necessarie e sufficienti perchè una forma F , delle medesime variabili, si possa esprimere come combinazione lineare di F_1, F_2, \dots, F_h ; ossia affinchè esistano certe forme A_1, A_2, \dots, A_h in guisa che:

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_h F_h.$$

Tale è il problema che ci occuperà nella presente Nota.

Esso assume un aspetto geometrico quando x_0, x_1, \dots, x_r , s'interpretino come coordinate omogenee di punto in uno spazio S_r . Alla totalità delle soluzioni dell'equazione $F_1 = 0$ viene a corrispondere una ∞^{r-1} di punti dello S_r , i quali diremo costituire una *ipersuperficie* ⁽²⁾, che denoteremo con la lettera F_1 ; e analogamente per le equazioni $F_2 = 0, \dots, F_h = 0$.

Mentre la forma F_1 determina F_1 , a questa corrispondono infinite forme che differiscono tra loro per fattori costanti.

Se in un punto comune a F_1, \dots, F_h sono soddisfatte le equazioni

$\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0, \left(\begin{array}{l} i=1, \dots, h \\ j=0, \dots, r \end{array} \right)$, quel punto o sarà multiplo per qualcuna delle F , oppure in esso gli iperpiani tangenti alle F saranno linearmente dipendenti; e quindi o il punto sarà multiplo per la varietà Φ comune alle F , oppure apparterrà ad una varietà, più che $r-h$ volte estesa, costituita da punti comuni alle F . Questa osservazione prova che se le equazioni (1) hanno meno che ∞^{r-h} soluzioni, la varietà Φ comune alle F sarà precisamente di dimensione $r-h$ e non avrà parti multiple ⁽³⁾, potendo del resto possedere

⁽¹⁾ *A proof of Nöther's fundamental Theorem* (Math. Ann., Bd. 52, pag. 593 [1899]).

⁽²⁾ Non adoperiamo, come si usa anche di fare, la parola *forma* per indicare l'insieme delle soluzioni di $F_1 = 0$, e analoghe, perchè in questo lavoro è utile non confondere la concezione della forma F_1 , con la concezione della totalità de' suoi zeri.

⁽³⁾ Ora e nel seguito parlando di *parte* di una varietà, s'intenderà di parlare di una varietà di *ugual dimensione*, in essa contenuta.

singularità qualunque; e viceversa. Sicchè geometricamente le condizioni a cui sono assoggettate le F si traducono in ciò che la varietà Φ è di dimensione $r - h$ e non ha parti multiple.

2. Per rispondere alla domanda che abbiám fatto al numero precedente, ci occorreranno alcune nozioni sulla teoria dei moduli, e, per comodità del lettore, le riuniremo qui ⁽¹⁾.

Si dice che un sistema illimitato di forme costituisce un *modulo* quando combinando linearmente un numero qualsiasi di forme del sistema si ottiene una forma di questo.

Si dimostra allora ⁽²⁾ che tra le forme di un modulo se ne può sempre trovare un numero finito F_1, \dots, F_h , talchè ogni forma F del modulo possa esprimersi come combinazione lineare di quelle:

$$F \equiv A_1 F_1 + \dots + A_h F_h.$$

Le forme F_1, \dots, F_h posson dirsi gli *elementi fondamentali* del modulo, che s'indicherà con (F_1, F_2, \dots, F_h) .

Interpretando le variabili x_0, \dots, x_r , delle quali le F son funzioni, come coordinate di punti in uno S_r , avremo le ipersuperficie F_1, \dots, F_h corrispondenti agli elementi fondamentali, e se c'è una varietà M comune alle F potrà chiamarsi la *varietà base* del modulo.

Considerando la totalità delle ipersuperficie passanti per M ⁽³⁾, verremo a considerare in corrispondenza un certo sistema di forme, il quale subito si scorge essere un modulo: bisogna però ben badare di non confondere questo modulo col modulo (F_1, F_2, \dots, F_h) ; ci saranno dei casi in cui i due moduli coincidono, ma è facile persuadersi sopra esempî, che non è sempre così.

Nella Memoria citata di Hilbert ⁽⁴⁾ si dimostra inoltre che il numero $\chi(l)$ delle condizioni indipendenti che s'impongono ad una forma d'ordine l (ai suoi coefficienti), obbligandola ad appartenere ad un certo modulo, se l è abbastanza grande, si rappresenta così:

$$\chi(l) = \chi_0 + \chi_1 \binom{l}{1} + \chi_2 \binom{l}{2} + \dots + \chi_a \binom{l}{d},$$

ove $\chi_0, \chi_1, \dots, \chi_a$ sono certi numeri, indipendenti da l , caratteristici del modulo dato, del quale $\chi(l)$ si chiama la *funzione caratteristica*.

(1) Vedasi l'importante Memoria di Hilbert, *Ueber die Theorie der algebraischen Formen* (Math. Ann., Bd. XXXVI, pag. 473 [1890]). Ivi si troveranno le citazioni relative ai lavori anteriori di Kronecker, Dedekind e Weber.

(2) Hilbert, loc. cit., pag. 479.

(3) Dicendo « ipersuperficie passante per M » intendiamo, come è d'uso nella geometria iperspaziale, alludere ad una ipersuperficie corrispondente ad una forma che si annulla in tutti i punti di M , senza che sia necessariamente soddisfatta qualche altra condizione circa l'annullarsi della forma stessa nei punti di M .

(4) Ved. a pag. 512.

inoltre: La questione del n. 1 è risolta dal teorema seguente: Se le ipersuperficie F_1, \dots, F_h ($h \leq r$) corrispondenti alle forme F_1, \dots, F_h delle $r+1$ variabili x_0, \dots, x_r si tagliano in una varietà di dimensione $r-h$, priva di parti multiple, la condizione necessaria e sufficiente perchè una ipersuperficie F corrisponda ad una forma F tale che

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2 + \dots + A_h F_h,$$

le A_1, \dots, A_h essendo forme di convenienti ordini, è che F passi per la varietà comune ad F_1, F_2, \dots, F_h (1).

Insieme alla proposizione enunciata noi dimostreremo quest'altra: La funzione caratteristica del modulo (F_1, F_2, \dots, F_h) ove F_1, \dots, F_h sono h ($\leq r$) forme (di $r+1$ variabili), rispettivamente degli ordini n_1, n_2, \dots, n_h , alle quali corrispondono le ipersuperficie F_1, \dots, F_h intersecantesi secondo una varietà $r-n$ volte estesa e priva di parti multiple, è:

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \dots + \sum \binom{l-n_i-n_h+r}{r} - \dots + (-1)^h \binom{l-n_1-\dots-n_h+r}{r}$$

ove i sommatori s'estendono alle combinazioni semplici di $1^2, 2^2, \dots, (h-1)^2$ classe degli indici $1, 2, \dots, h$ (2).

La dimostrazione delle due proposizioni antecedenti si farà simultaneamente e per induzione completa. Si osservi che l'un teorema e l'altro sono veri quando $h=1$; perciò li avremo dimostrati in ogni caso quando, ammettendoli veri per $h-1$ forme, di un numero qualsiasi di variabili, riusciremo a dimostrarli anche per h forme.

(1) Nella Memoria di Hilbert, *Ueber die vollen Invariantensysteme* (Math. Annalen, Bd. 42 [1892], ved. a pag. 320), si dimostra un teorema di cui è caso particolare il seguente: Se una forma F di x_0, x_1, \dots, x_r si annulla per gli stessi valori delle x per i quali si annullano simultaneamente le forme F_1, \dots, F_h delle medesime variabili, si può sempre determinare un numero intero s tale che $F^s \equiv A_1 F_1 + \dots + A_h F_h$.

Nella Nota, di poco anteriore, del prof. Bertini, *Rappresentazione di una forma ternaria per combinazione lineare di due altre* (Rendiconti del R. Istituto Lombardo, (2), t. XXIV [1891]) il numero s , di cui parla il teorema precedente, è determinato quando $h=2$ e F, F_1, F_2 son forme ternarie. Il teorema da noi dato nel testo dice che quando $h \leq r$ e le equazioni $\left\| \frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right\| = 0$ passano per meno che ∞^{r-h} zeri di F_1, \dots, F_h , il numero s di Hilbert è uguale ad 1.

(2) Nella Memoria di Wirtinger, *Untersuchungen über Thetafunctionen*, Leipzig, Teubner 1895, a pag. 20, trovasi una formola che esprime la funzione caratteristica della intersezione di una varietà, di data funzione caratteristica, con un certo numero di forme generiche. Ma la dimostrazione della formola suddetta mi sembra in qualche punto dubbia, sicchè non ne ho fatto uso.

4. Le ipersuperficie F_1, \dots, F_h di ordini n_1, n_2, \dots, n_h , e di equazioni $F_1 = 0, \dots, F_h = 0$ s'intersechino secondo la varietà Φ , ad $r-h$ dimensioni, e senza parti multiple:

Una ipersuperficie F , d'ordine l , insieme ad un iperpiano che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple, corrisponda ad una forma appartenente al modulo (F_1, \dots, F_h) ; allora io dico che anche la forma F , corrispondente a F , appartiene a questo modulo.

Supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ sia generico in guisa che tagli Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple; per ipotesi la forma $x_0 F$ apparterrà allora al modulo (F_1, \dots, F_h) , ossia avremo:

$$(1) \quad x_0 F \equiv A_1 F_1 + \dots + A_h F_h,$$

donde:

$$A_1(0, x_1, \dots, x_r) F_1(0, x_1, \dots, x_r) + \dots + A_h(0, x_1, \dots, x_r) F_h(0, x_1, \dots, x_r) \equiv 0,$$

dalla quale rilevasi che alla forma $A_1(0, x_1, \dots, x_r) F_1(0, x_1, \dots, x_r)$ corrisponderà una ipersuperficie passante per la M_{r-h} , senza parti multiple, comune alle ipersuperficie, che nell'iperpiano $x_0 = 0$, son determinate dalle forme F_2, \dots, F_h , delle quali (al pari della F_1) nessuna, nelle nostre ipotesi, si annulla identicamente ponendovi $x_0 = 0$. Siccome la sezione di F_1 con $x_0 = 0$ non passa per la suddetta M_{r-h} , chè altrimenti $x_0 = 0$ secherebbe Φ secondo una varietà più che $r-h-1$ volte estesa, dovrà l'ipersuperficie corrispondente ad $A_1(0, x_1, \dots, x_r)$ passare per la M_{r-h} più volte nominata; e, pel teorema ammesso per $h-1$ forme, sarà:

$$A_1(0, x_1, \dots, x_r) \equiv B_2(x_1, \dots, x_r) F_2(0, x_1, \dots, x_r) + \dots + B_h(x_1, \dots, x_r) F_h(0, x_1, \dots, x_r),$$

ossia:

$$A_1(x_0, x_1, \dots, x_r) \equiv B_2(x_1, \dots, x_r) F_2(x_0, x_1, \dots, x_r) + \dots + B_h(x_1, \dots, x_r) F_h(x_0, x_1, \dots, x_r) + x_0 A'_1(x_0, x_1, \dots, x_r).$$

Sostituendo nella (1), verrà:

$$x_0 F \equiv x_0 A'_1 F_1 + (A_2 + B_2 F_1) F_2 + \dots + (A_h + B_h F_1) F_h,$$

la quale prova che la ipersuperficie corrispondente alla forma $x_0 (F - A'_1 F_1)$ passa per la M_{r-h+1} , priva di parti multiple, comune a F_2, \dots, F_h . Siccome $x_0 = 0$ non passa per la M_{r-h+1} suddetta, ci passerà l'ipersuperficie di equazione $F - A'_1 F_1 = 0$, ossia, sempre pel teorema ammesso per $h-1$ forme, $F - A'_1 F_1$ apparterrà al modulo (F_2, \dots, F_h) :

$$F - A'_1 F_1 \equiv A'_2 F_2 + \dots + A'_h F_h,$$

donde:

$$F \equiv A'_1 F_1 + A'_2 F_2 + \dots + A'_h F_h,$$

che dimostra quanto abbiamo enunciato al principio di questo numero.

5. Per l'ipotesi fatta sulla Φ , comune a F_1, \dots, F_h , le F_1, \dots, F_{h-1} , come già abbiamo osservato, s'intersecheranno secondo una varietà ψ , ad $r - h + 1$ dimensioni, priva di parti multiple.

Il modulo (F_1, \dots, F_h) , di cui indichiamo con $\chi_1(l)$ la funzione caratteristica, è il « *größte gemeinsame Modul* » ⁽¹⁾ rispetto ai due moduli (F_h) e (F_1, \dots, F_{h-1}) , dei quali sono $\binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$ e $\chi(l)$ rispettivamente le funzioni caratteristiche. Il « *kleinste enthaltende Modul* » dei due (F_h) e (F_1, \dots, F_{h-1}) , ossia il sistema delle forme appartenenti contemporaneamente ai moduli suddetti, è costituito dalle forme B tali che:

$$B \equiv A_h F_h \equiv A_1 F_1 + \dots + A_{h-1} F_{h-1}.$$

Ad ogni tal forma B risponderà una ipersuperficie B passante per ψ ; e siccome la ipersuperficie F_h non passa per ψ , dovrà la A_h passare per ψ , e quindi, pel teorema ammesso per $h-1$ forme, sarà A_h del modulo (F_1, \dots, F_{h-1}) ; ossia il *kleinste enthaltende Modul*, del quale parlavamo, è, nelle nostre ipotesi $(F_1 F_h, \dots, F_{h-1} F_h)$. Una forma d'ordine l di questo modulo dipende da tante costanti quante sono quelle contenute in una forma d'ordine $l - n_h$ del modulo (F_1, \dots, F_{h-1}) , sicchè la funzione caratteristica del modulo suddetto è $\chi(l - n_h) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}$.

Applicando la relazione fondamentale di Hilbert (pag. 519), avremo:

$$\begin{aligned} \chi(l) + \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r} &= \chi_1(l) + \chi(l - n_h) + \\ &+ \binom{l+r}{r} - \binom{l-n_h+r}{r}, \end{aligned}$$

donde, in virtù della espressione ammessa per $\chi(l)$, si trae:

$$\begin{aligned} \chi_1(l) &= \binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_k+r}{r} - \dots + \\ &+ (-1)^h \binom{l-n_1-\dots-n_h+r}{r}, \end{aligned}$$

ove i sommatori si estendono alle combinazioni semplici di $1^a, 2^a, \dots, (h-1)^a$ classe degli indici $1, 2, \dots, h$.

6. Suppongasì $r = h$. In tal caso è facile vedere che se nella $\chi_1(l)$ si pone una qualunque delle n uguale a 0, i termini si elidono a due a due, e si ha $\chi_1(l) = 0$. Siccome $\chi_1(l)$ è funzione intera di grado h nelle n_1, n_2, \dots, n_h , si deduce $\chi_1(l) = C n_1 n_2 \dots n_h$, essendo C indipendente da n_1, \dots, n_h . Esa-

⁽¹⁾ Hilbert, loc. cit., pag. 517.

minando poi l'espressione trovata di $\chi(l)$ si vede che in essa il coefficiente di $n_1 \dots n_h$ è 1. Dunque:

$$\chi_1(l) = n_1 n_2 \dots n_h.$$

Ciò posto, nelle ipotesi nostre, le ipersuperficie F_1, \dots, F_h si tagliano in $n_1 n_2 \dots n_h$ punti P tutti distinti. Questi punti alle ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \dots n_h - 1$ obbligate a contenerli, impongono $n_1 n_2 \dots n_h$ condizioni semplici, perchè è possibile costruire una ipersuperficie d'ordine l per $n_1 n_2 \dots n_h - 1$ punti P e non pel rimanente; p. e. mediante $n_1 n_2 \dots n_h - 1$ iperpiani per altrettanti punti P e una ipersuperficie generica d'ordine $l - n_1 \dots n_h + 1$.

Sicchè le ipersuperficie d'ordine $l \geq n_1 \dots n_h - 1$ passanti pei P, formano un sistema lineare di dimensione

$$\binom{l+h}{h} - 1 - n_1 n_2 \dots n_h;$$

cioè un sistema così esteso come il sistema delle ipersuperficie, pure passanti pei P, che corrispondono a forme d'ordine l , abbastanza alto, appartenenti al modulo (F_1, \dots, F_h) . Ne segue che ogni forma $F(x_0, x_1, \dots, x_r)$ d'ordine $l \geq N$, ove N è un conveniente limite, passante per gli $n_1 n_2 \dots n_h$ zeri, tutti distinti, comuni alle forme $F_1(x_0, x_1, \dots, x_r), \dots, F_h(x_0, x_1, \dots, x_r)$, appartiene al modulo (F_1, \dots, F_h) ⁽¹⁾.

Se F è una forma d'ordine $N - 1$ passante per gli zeri comuni a F_1, \dots, F_h , considerandola insieme ad una forma lineare generica, avremo una forma d'ordine N passante per gli zeri comuni a F_1, \dots, F_h , e quindi appartenente al modulo (F_1, \dots, F_h) . Ma allora per la proposizione del n. 4 anche F apparterrà a questo modulo. Analogamente dalle forme di ordine $N - 1$ si passa a quelle di ordine $N - 2$, etc. Onde si può enunciare:

Ogni forma $F(x_0, \dots, x_r)$ passante per gli $n_1 n_2 \dots n_h$ zeri, tutti distinti, comuni alle forme F_1, \dots, F_h , è del modulo (F_1, \dots, F_h) .

7. Infine, sia $r = h + k$ ($k \geq 1$), e supponiamo di aver dimostrato che se h forme delle r variabili x_1, \dots, x_r , corrispondono ad altrettante ipersuperficie che si secano secondo una M_{r-h-1} priva di parti multiple, ogni forma di x_1, \dots, x_r , corrispondente a una ipersuperficie per questa M_{r-h-1} , appartiene al modulo delle h forme primitive; il che (grazie alla proposizione ammessa per $h - 1$ forme) si è dimostrato quando $k = 1$, al numero precedente.

Le ipersuperficie F_1, \dots, F_h di ordini n_1, \dots, n_h , corrispondenti alle forme F_1, \dots, F_h , si sechino secondo una varietà Φ di dimensione $r - h$,

⁽¹⁾ Questo ragionamento è analogo a quello fatto dalla Scott (loc. cit.), nel caso di due forme ternarie.

priva di parti multiple, e supponiamo che l'iperpiano $x_0 = 0$ secchi Φ in una M_{r-h-1} priva di parti multiple. Se F è una ipersuperficie, di ordine l , passante per Φ , considerando le sezioni di F, F_1, \dots, F_h con $x_0 = 0$ si potrà scrivere, nelle nostre ipotesi,

$$F(0, x_1, \dots, x_r) \equiv A_1(x_1, \dots, x_r)F_1(0, x_1, \dots, x_r) + \dots + A_h(x_1, \dots, x_r)F_h(0, x_1, \dots, x_r),$$

donde:

$$F(x_0, \dots, x_r) \equiv A_1(x_1, \dots, x_r)F_1(x_0, x_1, \dots, x_r) + \dots + A_h(x_1, \dots, x_r)F_h(x_0, x_1, \dots, x_r) + x_0 F'(x_0, x_1, \dots, x_r),$$

la quale mostra che la ipersuperficie F' , di ordine $l-1$, passa per Φ .

Se $l = m$, essendo m l'ordine minimo delle ipersuperficie passanti per Φ , dovrà dunque essere $F' \equiv 0$; se poi $l = m + q$ ($q > 0$), ragionando su F' come su F , e così di seguito, avremo una successione di forme F, F', F'', \dots , corrispondenti ad altrettante ipersuperficie passanti per Φ , e di ordini decrescenti, di una unità alla volta. Al più questa successione di forme si spingerà fino alla forma $F^{(q)}$, giacchè la forma successiva $F^{(q+1)}$, per essere di ordine $m-1$, sarà identicamente nulla. Ne viene che $F^{(q)}, \dots, F'', F', F$ apparterranno al modulo (F_1, \dots, F_h) .

I teoremi enunciati al n. 3 risultano così pienamente dimostrati.

8. Una conseguenza immediata del primo di questi teoremi è che il modulo (F_1, \dots, F_h) , quando le forme F_i corrispondano ad h ipersuperficie che si taglino secondo una varietà Φ_{r-h} , priva di parti multiple, coincide col modulo delle forme a cui corrispondono ipersuperficie per Φ .

Dunque pel secondo dei teoremi del n. 3 abbiamo:

La postulazione di una varietà Φ_{r-h} , priva di parti multiple, ma avente singolarità qualsiasi, che sia completa intersezione di h ipersuperficie di ordini n_1, n_2, \dots, n_h , per le ipersuperficie di ordine l abbastanza alto, è espressa da

$$\binom{l+r}{r} - \sum \binom{l-n_i+r}{r} + \sum \binom{l-n_i-n_h+r}{r} - \dots + (-1)^h \binom{l-n_1-\dots-n_h+r}{r},$$

i sommatori essendo estesi come al n. 3.

OSSERVAZIONI SUL CASO DI DUE FORME.

9. Il caso di due forme si può trattare particolarizzando i ragionamenti fatti in generale, per una via del tutto elementare, senza neppure ricorrere alla teoria dei moduli. Basta osservare che, nel caso di due forme, la dimostrazione dell'esistenza della funzione caratteristica $\chi(l)$ del modulo (F_1, F_2)

e il calcolo effettivo di essa, si posson condurre molto semplicemente, partendosi dall'ipotesi (più larga di quella che abbiain fatto nel caso generale di un numero qualsiasi di forme) che le due forme non abbiano *fattori comuni*; giacchè allora se una forma F , d'ordine l , è del modulo (F_1, F_2) , ossia se

$$F \equiv A_1 F_1 + A_2 F_2,$$

ogni altra rappresentazione della F , quando $l \geq n_1 + n_2$, è data dalla identità:

$$F \equiv (A_1 + X F_2) F_1 + (A_2 - X F_1) F_2,$$

ove X è una forma arbitraria di ordine $l - n_1 - n_2$; sicchè il numero delle costanti indipendenti che determinano F , si ottiene togliendo dalla somma dei numeri di costanti che compaiono in A_1 e in A_2 , il numero delle costanti che compaiono in X ; e quindi:

$$x(l) = \binom{l+r}{r} - \left[\binom{l-n_1+r}{r} + \binom{l-n_2+r}{r} - \binom{l-n_1-n_2+r}{r} \right].$$

Il ragionamento del n. 6, nel caso di due forme, ci dà facilmente la dimostrazione della rappresentabilità di una forma ternaria, che passi per gli zeri comuni a due altre, come combinazione lineare di queste, non solo nella ipotesi che le ultime due forme abbiain comuni zeri tutti distinti, ma anche nelle ipotesi più generali di Nöther. E infine il ragionamento del n. 7 permette di risalire dal caso di due forme ternarie, al caso di Nöther per due forme qualunque (¹).

Matematica. — *Sulle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali.* Nota del dott. GUIDO FUBINI, presentata dal Socio DINI.

La teoria delle equazioni differenziali lineari a coefficienti razionali, non appartenenti alla classe di Fuchs, presenta molte difficoltà, perchè certi elementi, algebrici per le equazioni di Fuchs, sono trascendenti per quelle. Lo scopo, che io ora mi propongo in questa Nota, è di far vedere come lo studio delle equazioni non di Fuchs, possa per certi lati essere immaginato come lo studio di un caso limite delle equazioni di Fuchs. Il metodo consiste nel

(¹) Nella *Théorie des fonctions algébriques des deux variables indépendantes* di Picard et Simart, alla pag. 17 del t. II, si estende alle forme quaternarie il *Fundamentalsatz*, deducendolo dall'analogo per le forme ternarie, con un procedimento che si può ripetere per due forme qualunque. Ma questo procedimento non è certo più semplice di quello che ci dà in tal caso il ragionamento del n. 7, nè si può estendere facilmente al caso di un numero (qualsiasi) di forme ternarie.

far sovrapporre i punti singolari di un'equazione Fuchsiana. Noi sappiamo infatti che un'equazione

$$(1) \quad y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = 0$$

a coefficienti razionali è o non è appartenente alla classe di Fuchs, secondo che l'ordine di polarità di p_k nei varî punti singolari per l'equazione non supera, o supera il numero k (supposto il punto all'infinito punto non singolare). Ed è ben chiaro che se questo limite fosse superato p. es. in un punto A, noi potremo immaginare che si sia arrivato ad esso, facendo sovrapporre parecchi punti singolari, in cui questi limiti non erano superati. Mi spiegherò con un esempio.

L'equazione:

$$(\alpha) \quad y'' + \frac{m}{(x-b)^2(x-c)^2} y' + \frac{n}{(x-b)^6(x-c)^4} y = 0$$

dove m, n, b, c sono costanti si può immaginare dedotta dalla:

$$(\beta) \quad y'' + \frac{m}{(x-b)(x-\beta)(x-c)(x-\gamma)} y' + \\ + \frac{n}{(x-b)^2(x-\beta)^2(x-l)^2(x-c)^2(x-\gamma)^2} y = 0$$

facendo tendere i punti β ed l verso il punto b fino a sovrapporsi a esso, e facendo quindi tendere il punto γ verso il punto c fino a sovrapporsi a c . E si osserva che, mentre la (β) è della classe di Fuchs, la (α) non appartiene alla classe delle equazioni Fuchsiane.

In generale noi stabiliremo il seguente teorema:

Per stabilire la sostituzione lineare che un sistema di integrali della (1) subisce in un punto A singolare non di Fuchs dell'equazione, in cui però le p_i non hanno singolarità essenziali e sono monodrome, basterà, nel modo precisato sostituire alla (1) un'altra equazione che in luogo del punto singolare A abbia altri punti singolari B, B' ... di Fuchs, studiare per questa l'effetto di un giro attorno i punti B, B' ... e passare quindi al limite facendo coincidere i punti B, B' ...

E se le p_i non hanno singolarità essenziali, ossia sono razionali, si potrà ripetere questo procedimento per (1) in tutti i punti singolari non di Fuchs.

Per dimostrare questo teorema, basterà chiaramente dimostrare il lemma seguente:

Sia

$$(2) \quad y^{(n)} + \frac{l_1(x)}{(x-a)^{p_1}(x-b)^{q_1}} y^{(n-1)} + \frac{l_2(x)}{(x-a)^{p_2}(x-b)^{q_2}} y^{(n-2)} + \dots = 0$$

un'equazione lineare a derivate ordinarie; e siano $l_1(x), l_2(x), \dots$ fun-

zioni razionali di x , regolari nei punti a, b e indipendenti da b . La sostituzione Σ fondamentale che un sistema di integrali subisce per un giro C chiuso, finito, non intrecciantesi attorno ai punti $x=a$, $x=b$ e a nessun altro punto singolare della (2) tende a un limite, quando b tende ad a e precisamente alla sostituzione T fondamentale per l'equazione

$$(3)] \quad y^{(n)} + \frac{l_1}{(x-a)^{p_1+q_1}} y^{(n-1)} + \dots = 0$$

dovuta a un giro semplice, finito attorno il punto $x=a$ e a nessun altro punto singolare della (3).

La dimostrazione di questo teorema si compie nel modo più semplice per mezzo delle seguenti considerazioni:

I) La sostituzione Σ dovuta al giro C si può anche immaginare come dovuta a un giro attorno a tutti gli altri punti singolari eventuali della (2).

II) Questa sostituzione si può immaginare come prodotto delle sostituzioni dovute ai cappi attorno a ciascuno degli altri punti singolari eventuali, supposti in numero finito.

III) Basterà, per dimostrare il nostro teorema, far vedere che la sostituzione dovuta a uno di questi cappi relativa alla (2), diventa al limite una sostituzione dovuta allo stesso cappio, relativa alla (3).

Dimostriamo dunque quest'ultima asserzione. Per far questo ricorriamo al metodo del prolungamento analitico, che immagineremo proprio eseguito al modo di Weierstrass.

Cioè immagineremo lungo il cappio distribuiti dei cerchietti Γ , in numero finito, non includenti punti singolari della (3) in modo che due cerchietti consecutivi abbiano una parte comune. E di più li sceglieremo in modo che mentre b si avvicina ad a , almeno da un certo punto in poi non includano neppure punti singolari della (2).

Pensiamo gli integrali come funzioni delle variabili x, b . E sia $x=K$ il centro di uno dei nostri cerchietti. Il punto $x=K, b=a$ è un punto di regolarità per i coefficienti della nostra equazione; quindi, per noti teoremi, noi potremo segnare attorno ad a nel piano complesso di b un intorno Γ' tale che per x variabile nel cerchietto di centro K e per b variabile in Γ' , gli integrali siano olomorfi in x , e b . Anzi, poichè i cerchietti Γ sono in numero finito, potremo costruire un intorno Γ' che valga per tutti questi cerchietti. E allora si deduce senz'altro che poichè i coefficienti della sostituzione si deducono dai valori dei detti integrali (a Wronskiano non nullo) e delle loro derivate, essi saranno funzioni analitiche regolari di b nell'intorno Γ' . È perciò lecito il succitato passaggio al limite.

Queste considerazioni, che per maggiore chiarezza abbiamo applicato ai varî cappi, si potevano del resto anche applicare direttamente al giro C .

Sia ora un'equazione con più punti singolari $A_0^{(1)}, A_0^{(2)}, \dots, A_0^{(n)}$ ⁽¹⁾. Sdoppiamo ciascuno di essi nel modo descritto in più punti singolari di Fuchs, e siano $A_0^{(k)}, A_1^{(k)}, \dots, A_{t_k}^{(k)}$ i punti singolari cui ha dato origine il punto $A_0^{(k)}$ (per $k = 1, 2, \dots, n$) dove t_k è un numero intero nullo o positivo. Immaginiamo i valori della variabile complessa in tutti questi nuovi punti singolari funzioni, p. es. lineari, di un parametro ε , tali che per $\varepsilon = 0$ ciascun punto $A_r^{(k)}$ ($k = 1, 2, \dots, n$; $r = 1, 2, \dots, t_k$) venga a cadere nel punto $A_0^{(k)}$. Facciamo un giro semplice C attorno ai punti $A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_{t_i}^{(i)}$ ($i = 1, 2, \dots, m$; $m < n$). Le stesse considerazioni precedenti applicate senza altro al cammino C , che noi naturalmente supponiamo a distanza finita da $A_0^{(i)}$, dimostrano che i coefficienti della sostituzione dovuta al giro C , sono olomorfi nella ε in un piccolo intorno di $\varepsilon = 0$ nel piano complesso di ε . È dunque lecito il passaggio al limite per $\varepsilon = 0$, cosicchè l'effetto dovuto al giro attorno ai punti singolari $A_0^{(i)}$ dell'equazione iniziale si può immaginare come caso limite di quello dovuto al giro attorno ai punti $A_0^{(i)}, A_1^{(i)}, \dots, A_{t_i}^{(i)}$ dell'equazione trasformata. Dunque:

Un'equazione differenziale lineare ordinaria a punti singolari di Fuchs si può, per quanto riguarda le sostituzioni che subiscono gli integrali attorno ai punti critici, immaginare limite di un'equazione a soli punti singolari di Fuchs.

Questi teoremi, che mi sembrano notevoli dal punto di vista teorico, hanno anche il vantaggio di potere con un nuovo metodo calcolare la sostituzione dovuta ad un giro attorno a uno o più punti singolari A , nel caso che l'equazione sia a coefficienti razionali. Basta infatti a una tale equazione sostituire nel modo descritto un'equazione a soli punti Fuchsiani singolari e calcolare, per es. col metodo di Fuchs, l'effetto dovuto a un giro per gli integrali di quest'ultima attorno ai punti A e a quei nuovi punti singolari, che si devono poi far tendere ai punti A stessi. Un semplice passaggio al limite, ci darà allora la sostituzione cercata. Questo metodo, che praticamente è certo complicato, non usa però alcun algoritmo di determinanti infiniti o di rappresentazioni conformi.

Fisica terrestre. — *Sopra un sismografo per forti terremoti.*

Nota di G. AGAMENNONE, presentata dal Socio P. TACCHINI.

Dopo aver pubblicato in questi stessi Rendiconti la descrizione di svariati apparecchi sismici, quali più quali meno sensibili, sia per la semplice indicazione delle scosse di terremoto (*sismoscopi*), sia per la misura dell'effettivo movimento del suolo provocato dalle medesime (*sismometrografi*), credo di qualche interesse far conoscere un nuovo strumento, destinato allo

(¹) In cui i coefficienti abbiano sole singolarità polari.

studio delle perturbazioni sismiche d'una certa forza, in occasione delle quali possono diventare insufficienti gli altri strumenti di maggiore sensibilità. Di ciò abbiamo avuta ampia prova negli ultimi anni, in occasione d'alcuni terremoti piuttosto sensibili avvenuti nel Lazio, i quali riuscirono con facilità a mettere fuori d'azione tanto gli strumenti esistenti all'Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, quanto quelli collocati nella Stazione sismica sperimentale di Roma, presso l'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica.

Il nuovo strumento è stato denominato *macrosismometrografo* in contrapposto al titolo di *microsismometrografo*, da me dato ad altro apparecchio assai più delicato, già fatto conoscere all'Accademia e destinato, invece, ai minimi movimenti del suolo ⁽¹⁾. Prima che ancora fosse costruito, pubblicai fin dal 1900 una breve Nota, nella quale esposi per sommi capi i criteri a' quali doveva ispirarsi la sua costruzione ⁽²⁾. Ed ora che lo strumento è stato effettivamente costruito, grazie ai mezzi messi a mia disposizione dal prof. L. Palazzo, il nuovo direttore dell'Ufficio Centrale di Meteorologia e Geodinamica, ed è stato installato fin dal settembre 1901 nel R. Osservatorio geodinamico di Rocca di Papa, stimo opportuno di darne qui un breve cenno, riserbandomi di darne una descrizione completa in una Memoria, corredata da figure, che sarà prossimamente pubblicata nel vol. VII del Bollettino della Società Sismologica Italiana.

Per uno studio rigoroso dei terremoti, è bene che in ogni località il movimento del suolo sia risoluto secondo tre componenti ad angolo retto tra loro, e precisamente due orizzontali ed una verticale. Per la registrazione delle due prime io ho adottato due piccoli pendoli orizzontali, impiantati ad angolo retto, l'uno per rapporto all'altro, sopra una solida base quadrata in ghisa. La sospensione di detti pendoli assomiglia assai a quella del *Bracket Seismometer* dell'Ewing ed è costruita in guisa che i pendoli non debbono tralasciare di ben funzionare, anche in presenza di poderosi scuotimenti impressi alla loro base. Dall'asse di rotazione verticale di ogni pendolo, dell'altezza di circa 25^{cm}, partono, sotto un angolo di 45°, due sbarre di ferro orizzontali, lunghe 40^{cm} e collegate tra loro: l'una di sezione quadrata, sulla quale può scorrere un cilindro di piombo del peso di circa kg. 1 ¹/₂; l'altra di sezione rettangolare che funge da stilo scrivente e che termina con un ago alla sua estremità. La disposizione dei due pendoli è tale che quando le due sbarre quadrangolari fanno tra loro un angolo di 90°, le altre due risultano parallele

(1) G. Agamennone, *Nuovo tipo di sismometrografo*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, ser. 5^a, vol. IX, pag. 31, seduta del 15 luglio 1900. — Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VI, 1900-1901, pag. 71. — Id., *Il microsismometrografo a tre componenti*. Rend. della R. Acc. dei Lincei, vol. X, pag. 291, seduta del 21 aprile 1901. — Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VII, 1901-1902, pag. 70.

(2) *Sismometrografo a tre componenti per forti terremoti*. Boll. della Soc. Sism. Italiana, vol. VI (1900-1901), pag. 135.

tra loro e ad una distanza di 12^{cm}, quanta appunto ne corre tra gli assi di rotazione dei pendoli. Ogni asse di rotazione è bilicato, in basso, sopra una punta fissa, e può essere spostato, in alto, in due direzioni ortogonali tra loro, mediante due viti di registro, allo scopo di rendere paralleli i due stili scriventi, come pure d'inclinare convenientemente gli stessi assi di rotazione, affinchè si possa far variare a piacere il periodo oscillatorio delle masse di piombo.

Nel modello di Rocca di Papa il tempo, impiegato da ogni pendolo a compiere un'oscillazione semplice, è di 4^s, quale appunto si avrebbe da un pendolo verticale di ben 16 metri. Questo periodo è già abbastanza lento, per permettere di poter sceverare con facilità le oscillazioni strumentali dai veri moti del suolo, i quali sono generalmente piuttosto rapidi nei terremoti locali, od in quelli d'origine relativamente vicina. Quando le masse di piombo sono fissate all'estremità delle rispettive sbarre quadrangolari, e cioè alla stessa distanza (40^{cm}) a cui trovansi gli aghi scriventi dall'asse di rotazione, è ovvio come non possa aversi alcuna moltiplicazione nelle indicazioni dello strumento. Facendo però scorrere le masse indietro, e cioè avvicinandole all'asse di rotazione del pendolo, l'ingrandimento va crescendo poco a poco; e quando le masse siano fissate giusto alla metà di dette sbarre, ciò che costituisce l'estremo limite della loro corsa, l'ingrandimento raggiunge il valore massimo di 1 a 2.

Per la registrazione della componente verticale, avuto riguardo ai maggiori attriti, è stata adottata una massa di piombo alquanto più grande (2 kg.), sospesa a quattro saltaleoni d'acciaio mediante il sistema *Ewing*, nello stesso modo appunto adoperato per la componente verticale del *microsismometro-grafo*, sopra ricordato. Tutto il meccanismo è stato poi disposto in tal guisa, in mezzo ai due pendoli orizzontali sopra descritti, che mediante opportune compenetrazioni si è realizzata una grande economia di spazio e si è potuto dare all'intero apparato una forma abbastanza semplice e razionale. I quattro saltaleoni, d'ugual lunghezza e paralleli tra loro, pendono da una colonna fissata sulla stessa piattaforma, dove sono imperniate le estremità superiori degli assi di rotazione dei pendoli orizzontali, e sorreggono, in basso, il telaio che posteriormente ruota attorno ad un asse orizzontale, consimile a quello dei pendoli anzidetti, e termina davanti pure con una sbarra quadrangolare, sulla quale si fa scorrere la massa di piombo di 2 kg. I movimenti poi del telaio, dall'alto in basso e viceversa, sono trasformati, mediante una leva codata a bracci uguali, in movimenti in senso orizzontale d'uno stilo, lungo pure 40^{cm} e che risulta parallelo ed intermedio agli altri due, destinati alle componenti orizzontali; ma questo terzo stilo resta alquanto più basso e spostato di poco indietro, affinchè ne' suoi movimenti non possa urtare gli altri due. Anche qui non mancano le viti di rettifica per regolare il periodo oscillatorio di questa terza massa, il quale può essere con facilità reso uguale a quello di 4^s,

con cui oscillano ambo i pendoli orizzontali. Inoltre, col fare scorrere in avanti od indietro questa terza massa sulla rispettiva sbarra quadrangolare, si riesce a far variare l'ingrandimento per la componente verticale, e precisamente entro gli stessi limiti, già fatti conoscere per le componenti orizzontali.

La registrazione delle tre componenti si compie, mediante tre piccoli aghi verticali, scorrevoli entro convenienti guide, sopra una zona di carta laccata affumicata, chiusa in sè stessa, larga 25^{cm} e lunga circa 3 1/2 metri. Quest'ultima sta a cavalcioni sopra un cilindro d'ottone, lungo 30^{cm} e del diametro di 20^{cm}, il quale riposa, con l'asse disposto orizzontalmente, sopra due cosciali robusti, fissati a due bracci in ferro e sporgenti dalla parte anteriore della base dello strumento. L'asse del cilindro termina da una parte con una ruota dentata, la quale ingrana con un rocchetto d'un semplice meccanismo d'orologeria, fissato ad uno degli anzidetti cosciali, e dal lato opposto termina con una carrucola, sulla quale si avvolge un cordoncino. Quando a quest'ultimo si attacchi un conveniente peso, il cilindro si pone tosto in rapida rotazione, nella ragione d'una trentina di metri all'ora, velocità questa sufficiente per mettere non solo in evidenza tutte le particolarità d'un sismogramma, per quanto complicato, ma per fare una buona analisi del moto del suolo, anche se abbastanza rapido. Ad ogni modo, se si credesse opportuno d'accreocere ancora di più la velocità della carta, non si avrebbe che da aumentare il peso motore.

Il cilindro è destinato ad entrare in rotazione soltanto in occasione d'una scossa piuttosto sensibile, in seguito al funzionare d'uno qualunque d'una serie di sismoscopî, non troppo delicati, capaci di lasciar libera la ventola del meccanismo l'orologeria, sia agendo elettricamente per l'intermediario d'un piccolo elettromagnete, sia in modo meccanico. Considerando che i forti terremoti sono piuttosto rarî per una data località, si capisce come non sarebbe stato conveniente l'adottare pel nuovo strumento la registrazione continua, come pure di far uso di sismoscopî estremamente sensibili i quali, al verificarsi anche di scosse minime, pongano in moto la zona affumicata senza speranza che gli stili dello strumento vi possano tracciar sopra altro che linee rette. Una volta che la zona affumicata ha cominciato a scorrere, può restare in movimento, senza che i tracciati si sovrappongano, per circa 7-8 minuti, tempo questo più che sufficiente per registrare completamente qualsiasi scossa, anche se di straordinaria durata. Anzi, potrà avvenire che si registri sulla stessa zona anche qualche scossa secondaria che, a pochissimi minuti di distanza, preceda o segua quella principale. Ad impedire poi che lo stesso tratto di zona passi due volte sotto gli aghi scriventi, basta regolare la lunghezza del cordoncino avvolto alla carrucola, che è fissata all'asse del cilindro motore; per modo che tagliando poi la zona in un punto intermedio al principio ed alla fine del sismogramma, si possa ottenere quest'ultimo tutto per intero ed aver così agio di poterlo studiare con maggiore facilità e senza aver bisogno di

doverlo ricopiare. Per raggiungere ancor meglio questo scopo, gli aghi scriventi, relativi alle componenti orizzontali, toccano il cilindro sulla stessa generatrice, in guisa che non vi è nemmeno bisogno di conoscere la così detta *parallasse*; e per conseguenza si può benissimo fare a meno di copiare il sismogramma, come si suol fare comunemente, spostando il tracciato d'una componente per rapporto all'altra, per correggere l'errore della *parallasse* e poi procedere alla ricomposizione del moto effettivo del suolo. Evidentemente, con la predetta disposizione resta diminuita la corsa degli aghi scriventi, relativi alle componenti orizzontali, non potendo l'uno passare al di sopra od al di sotto dell'altro; ma convien riflettere che ogni ago può muoversi per ben 6^{cm} al di qua ed al di là della sua posizione di riposo, e che il massimo ingrandimento, consentito dall'apparecchio, non supera quello di 1 a 2. Ad ogni modo, per prevenire che gli stili per le componenti orizzontali possano urtarsi tra loro, od uscire dalla zona affumicata, in caso di terremoti di straordinaria intensità, è prudente di porre opportuni ostacoli laterali alle masse dei pendoli orizzontali.

Allo scopo di segnare il tempo, è stata fissata sopra lo stesso meccanismo d'orologeria una piccola elettro-calamita, la cui ancora fa muovere, sul bordo corrispondente della carta, un quarto ago che scrive in modo identico a quelli dei tre stili e, mediante apposite viti di registro, può essere allineato con i due aghi relativi alle componenti orizzontali, in modo che anche qui non si abbia da tenere conto alcuno della così detta *parallasse*. Questa elettro-calamita è collegata ad un cronometro, che stabilisce un brevissimo contatto elettrico ad ogni secondo ed un altro, un po' meno breve, ad ogni minuto. Si è così in grado di poter conoscere l'ora esattissima d'ogni parte del sismogramma, quando siasi potuto riconoscere il primo minuto, segnato sulla zona di carta già in movimento, e ciò grazie ad un orologio sismoscopico che si pone in marcia all'istante stesso in cui comincia a ruotare il cilindro motore, in seguito al funzionamento di uno qualunque dei sismoscopî. Affinchè poi questo quarto ago, destinato alla misura del tempo, non debba agire inutilmente — scrivendo sulla zona di carta quando quest'ultima è ferma — e possa quindi a lungo andare perfino lacerarla nel punto ove la sfrega, è stato disposto, mediante un semplice interruttore, che la corrente lanciata dal cronometro non cominci a passare per l'elettro-calamita che solo al funzionare dei sismoscopî.

Fino ad oggi non si è verificato ancora a Rocca di Papa alcun terremoto un po' intenso, tale da mettere a prova il nuovo strumento, e da ottenerne un sismogramma per quanto di menoma importanza. Veramente il macrosismometrografo ha funzionato già due volte, e cioè il 15 ottobre 1901, in occasione d'una scossa abbastanza sensibile negli Abruzzi, e di nuovo il 16 dicembre dello stesso anno, in seguito ad una moderata perturbazione sismica nell'Umbria; ma, com'era da aspettarsi, tutt'e due le volte gli stili

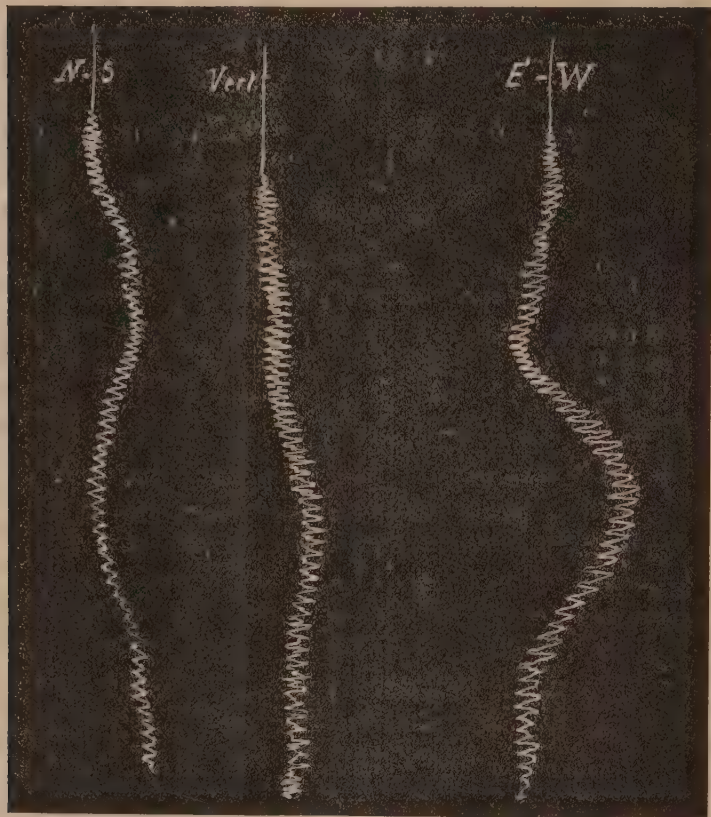
non lasciarono altro che linee rette, in quanto che le onde sismiche che passarono sul Lazio furono di sì poca entità da non essere menomamente avvertite dagli abitanti. In entrambe le volte tuttavia ebbe a constatarsi il buon funzionamento dello strumento e la registrazione esatta dei minuti e dei secondi sulla zona affumicata.

In mancanza di forti terremoti che fortunatamente non sono frequenti, ho voluto però rendermi conto del modo di funzionare del macrosismometrografo, prima ancora che fosse definitivamente installato all'Osservatorio di Rocca di Papa. A tal fine lo si collocò sopra una tavola quadrata sospesa, ai quattro angoli, a quattro robusti e corti saltaleoni in acciaio verticali e paralleli tra loro, in guisa da imprimere alla tavola movimenti piuttosto rapidi tanto in senso orizzontale, quanto in senso verticale, nel tempo stesso che si faceva scorrere la zona affumicata. Ognuno vede come in questa esperienza, al pari di quanto si verifica nei veri terremoti, abbian partecipato al movimento complicato della tavola non solo la base dell'apparecchio, ma gli stessi assi di rotazione dei due pendoli orizzontali e di quello verticale; e malgrado ciò si ottenne un sismogramma assai nitido, nel quale si videro le oscillazioni, impresse alla tavola, sovrapposte a quelle assai più lente corrispondenti alle oscillazioni proprie dei pendoli. Da una misura eseguita sul sismogramma si poterono ricavare valori in grande accordo con quelli direttamente osservati sulla direzione, ampiezza e periodo oscillatorio dei movimenti subiti dalla tavola.

Un'altra esperienza consistette nel collocare il macrosismometrografo sopra un piccolo carretto a quattro ruote, e nel farlo poi correre sopra un pavimento a mosaico, nel mentre che la zona di carta si spostava al di sotto degli stili. La seguente figura in zincofototipia riproduce fedelmente ed in vera grandezza un tratto del sismogramma artificiale, che si ottenne in una di queste prove. I sobbalzi del carretto, unitamente agli spostamenti bruschi del medesimo, vi appariscono distintamente sovrapposti alle lente ondulazioni, dovute esclusivamente al pendolo oscillante verticalmente ed ai due pendoli orizzontali N-S ed E-W. Il periodo oscillatorio semplice è di circa 4^s in ogni pendolo, mentre i tremiti principali, registrati dallo strumento, sono caratterizzati da un periodo semplice di poco più di $\frac{1}{10}$ di secondo per tutte e tre le componenti.

Dall'esame di questo sismogramma artificiale mi pare potersi logicamente concludere che, quando il periodo oscillatorio del suolo è assai rapido in confronto di quello strumentale, come appunto nel nostro caso, si è in grado di determinare con grande facilità ed approssimazione il moto assoluto d'una particella del suolo. Ma non v'è niun che non veda come, per raggiungere questo intento, bisogna assolutamente dare alla zona di carta velocità piuttosto considerevoli, senza di che tornerebbe ben difficile il voler misurare non tanto il periodo oscillatorio, quanto l'ampiezza e la direzione dell'effettivo

moto del suolo. Quello che asserisco riesce tanto più evidente, se vogliansi esaminare nel sismogramma riportato anche i tremiti secondari che accompagnano quelli principali.



Salta agli occhi la difficoltà, per non dire impossibilità, di volerli studiare con una certa esattezza, nonostante che nel nostro caso la velocità di scorrimento della zona sia stata d'una trentina di metri all'ora, e perciò ben superiore a quella che taluni ancor si compiacciono d'adottare, dichiarandola più che sufficiente per i bisogni dell'odierna sismometria.

Fisica terrestre. — *Propagazione dei terremoti.* Nota di GIULIO GRABLOVITZ, presentata dal Socio BLASERNA.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

Mineralogia. — *Wavellite di Manziana* (Provincia di Roma).
Nota di FERRUCCIO ZAMBONINI, presentata dal Socio STRUEVER.

Avendo avuto occasione di vedere a Biella la collezione di minerali dei fratelli Sella, mi colpì un esemplare (n. 3848 di catalogo) accompagnato dalla seguente etichetta: « Prehnite sopra trachite. — Manziana (Roma) » ⁽¹⁾.

Questa indicazione mi colpì non poco, perchè, per quanto è a mia conoscenza, la prehnite non è stata finora rinvenuta nei dintorni del lago di Bracciano. Mi parve quindi non inutile eseguire qualche saggio chimico per accertare la natura del singolare campione, ciò che mi fu subito concesso dai signori Corradino ed Alfonso Sella, ai quali mi è grato rendere anche qui i miei più vivi ringraziamenti.

Il minerale in questione si presenta in sfere e semisfere a struttura fibro-raggiata perfettissima, su un pezzo della solita trachite a grossi cristalli di sanidino, nota a Roma sotto il nome di *pietra della Manziana*.

Queste sfere, che superano talvolta anche 5 mm. di diametro, hanno colore superficiale verdognolo chiarissimo: somigliano dunque moltissimo, per il loro aspetto esterno, alla prehnite globulare della Val di Fassa. Molta somiglianza hanno ancora questi globuli di Manziana con la phillipsite fibro-raggiata, così frequente nella leucitite di Vallerano, nei dintorni di Roma.

Le poche proprietà ottiche e cristallografiche che si poterono determinare nei sottili individui che costituiscono i globuletti, e l'analisi chimica mi dimostrarono che si aveva a che fare con *wavellite*.

Gli individui separati dalle sferette mostrano al microscopio, tra nicol incrociati, estinzione parallela alla loro direzione di allungamento (asse z); in tre di essi si poté misurare con sufficiente approssimazione l'angolo del prisma, che risultò molto vicino a $53\frac{1}{2}^\circ$. In base alle costanti di Senff, accettate dal Dana, si avrebbe $(110):(1\bar{1}0) = 53^\circ 34\frac{2}{3}'$. Oltre il prisma fondamentale, si riconosce frequentemente il pinacoide $\{010\}$, ed in un cristallo notai anche due faccie terminali, ad un'estremità di z , che sono, con tutta probabilità, quelli di $\{101\}$.

La wavellite di Manziana al cannello non fonde, manda una viva luce e diventa bianca, opaca. Non ho potuto constatare il rigonfiamento indicato dal Des Cloizeaux e dal Dana nei loro trattati. Nel tubo chiuso svolge molta acqua a reazione fortemente acida, e diventa bianca, opaca. Colora, e nettamente, ove sia umettata con acido solforico, la fiamma in verde molto pallido.

(1) Manziana è un piccolo paese sulla ferrovia Roma-Viterbo, a pochi chilometri dal lago di Bracciano.

Si scioglie completamente negli acidi: bisogna per altro porre grande attenzione nella scelta del materiale per l'analisi, perchè con la massima facilità si possono mescolare ad esso delle particelle feldspatiche⁽¹⁾, talchè si può essere tratti in inganno sull'azione che gli acidi effettivamente esercitano sul minerale.

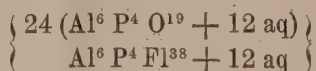
Per determinare l'acido fosforico mi sono servito del metodo di Woy, così come è descritto dal Treadwell⁽²⁾ nel suo recentissimo trattato: del resto ho seguito il Fresenius: per il fluoro ho fatto una determinazione a parte.

I risultati dell'analisi sono i seguenti:

P ₂ O ₅	33,76
Al ₂ O ₃	37,11
H ₂ O	26,69
F	2,05
	<hr/> 99,61

Si ha dunque la composizione di una wavellite molto pura: io infatti non ha potuto constatare la presenza del calcio e del magnesio: il ferro è presente in quantità indeterminabile.

Il Rammelsberg⁽³⁾ per le wavelliti fluorifere ha calcolato, in base all'analisi che Pisani ha pubblicato della wavellite di Montebbras, la formula seguente:



Ma questa complicata formula resta non poco scossa dalla giusta osservazione che egli fa subito dopo, che, cioè, in base alle ricerche di Church sulla perdita d'acqua a varie temperature, la wavellite deve contenere H⁶ Al² O⁶.

A. Carnot⁽⁴⁾ ha pubblicato qualche anno fa, quattro analisi di wavelliti irlandesi ed americane, particolarmente interessanti per le esatte determinazioni di fluoro eseguite col suo elegante metodo: dai suoi risultati egli calcola la formula 2 (P₂ O₅, Al₂ O₃) + Al₂ (O₃, F₆) + 13 H₂ O, nella quale 1/8 — 1/4 dell'ossigeno nel secondo termine è sostituito da fluoro. Nella recensione di questo lavoro del Carnot, il Groth⁽⁵⁾ propone per la wavellite l'ele-

(1) Se si osservano al microscopio delle sezioni un po' sottili delle sferette, si constata talvolta in esse la presenza di piccole quantità di sanidino.

(2) *Kurzes Lehrbuch der analytischen Chemie*, 1901, Bd. II, 292.

(3) *Handbuch der Mineralchemie*. Leipzig, 1875, 319.

(4) *Sur la composition chimique des wavellites et des turquoises*. C. R. 1894, CXVIII, 119.

(5) *Zeitschr. f. Krystall.* 1896, XXVI, 108.

gante e semplice formula $(\text{PO}_4)_2(\text{AlOH})_3, 5\text{H}_2\text{O}$, nella quale $\frac{1}{6}$ dell'OH è sostituito da F. La wavellite di Manziana per la sua composizione si accorda perfettamente con la formula di Groth, la quale, infatti, richiede:

P_2O_5	33,9
Al_2O_3	36,8
H_2O	27
F	2,3
	<hr/> 100,0

La wavellite è molto rara in Italia. Molti anni fa, fu scoperta a N. O. dei monti di Allumiere in una trachite decomposta dal barone A. Klitsche de la Grange, e fu descritta dal Bombicci ed analizzata dal Lucchetti ⁽¹⁾. L'averla ora ritrovata anche a Manziana, accenna ad una diffusione maggiore di questo minerale nella regione trachitica che intercede fra il lago di Bracciano ed il mare.

Petrografia. — *Rocce trachitiche del cratere di Fondo Riccio nei Campi Flegrei.* II. *Jalotrachite rossa e grigio-cinerea ad augite ed egirina e tufo giallo.* Nota di E. MANASSE ⁽²⁾, presentata dal Corrispondente DE STEFANI.

Jalotrachite rossa e grigio-cinerea.

Ad occhio nudo o munito di lente si riconoscono nella scoria rossa della Concola come già nelle scorie nere precedentemente descritte ⁽³⁾ segregazioni feldispatiche, pirosseniche e biotitiche; ma sono assai scarse. Al microscopio essa apparisce formata quasi esclusivamente da un vetro rosso, porosissimo e povero di microliti augitici e feldispatici e di trichiti. Le segregazioni porfiriche sono qui pure dovute al plagioclasio nelle sue diverse modalità, al sanidino, forse all'anortose, alla biotite, all'augite, all'egirina. Non mi riuscì scorgere nè l'orneblenda, nè l'hauina, nè la sodalite; e la roccia, trattata con acido nitrico, non dà reazione alcuna di anidride solforica, ma dà reazione di cloro (0,29 %). La magnetite esiste solo in piccola parte, chè essa è sostituita da ematite e da poca limonite.

⁽¹⁾ *Analisi della Wavellite recentemente scoperta alla Tolfa, presso le Allumiere.* Rend. Accad. Scienze dell'Ist. di Bologna, anno 1879-80.

⁽²⁾ Lavoro eseguito nel Laboratorio di Mineralogia della R. Università di Pisa.

⁽³⁾ Rend. Acc. Lincei, Serie 5ª, Vol. XI, fasc. 2º, pag. 85. 1902.

Ecco ora ciò che ottenni nell'analisi centesimale di questa jalotra-
chite rossa:

H ² O a 110°	0,25
H ² O sopra 110°	0,24
SiO ²	57,25
Al ² O ³	19,93
Fe ² O ³	4,83
FeO	2,27
MnO	0,09
CaO	3,40
MgO	1,78
K ² O	6,96
Na ² O	4,43
Ph ² O ⁵	tracce
Cl	0,29
	<hr/>
	101,72
— O = 2Cl	0,07
	<hr/>
	101,65

da cui, portando a 100 con esclusione di acqua, cloro e anidride fosforica,
e deducendone le quantità molecolari dei componenti, la formula magmatica,
 α e β , si ha:

SiO ²	56,72	0,9390	0,9390	0,9390
Al ² O ³	19,74	0,1931	} 0,2229	0,2229
Fe ² O ³	4,79	0,0298		
FeO	2,25	0,0312		
MnO	0,09	0,0012	} 0,1361	} 0,2797
CaO	3,37	0,0601		
MgO	1,76	0,0436		
K ² O	6,89	0,0730		
Na ² O	4,39	0,0706	} 0,1436	
	<hr/>			
	100,00			

$$9,4 \text{ SiO}^2; 2,2 \text{ R}^2\text{O}^3; 2,8 \bar{\text{R}}\text{O}, \text{ ovvero } 4,3 \text{ SiO}^2; \text{R}^2\text{O}^3; 1,3 \bar{\text{R}}\text{O}$$

$$\alpha = 1,98; \beta = 54$$

$$\text{R}^2\text{O} : \text{RO} = 1 : 1; \text{Na}^2\text{O} : \text{K}^2\text{O} = 1 : 1$$

Un campione di questa stessa scoria, ma con colorazione più chiara, cinereo-

rossastra, ricco in oligisto micaceo, e racchiudente dei frammenti consistenti, credo di tufo, diede all'analisi:

H ² O a 110°	0,15
H ² O sopra 110°	0,64
SiO ²	51,48
Al ² O ³	17,80
Fe ² O ³	14,27
FeO	1,59
MnO	0,15
CaO	0,89
MgO	1,04
K ² O	5,64
Na ² O	4,94
Cl.	0,46
Ph ² O ⁵	tracce
	<hr/>
	99,05
— O = 2Cl	0,10
	<hr/>
	98,95

Un'altra scoria infine, raccolta pure alla Concola, ha colore grigio-cinereo ed è tanto friabile che riesce impossibile farne delle sezioni per lo studio microscopico. La sua composizione chimica, qui sotto riportata, corrisponde però assai bene a quella delle altre scorie. La sola differenza notevole consiste in un aumento dell'ossido ferrico e relativa diminuzione dell'ossido ferroso, e in un aumento dell'acqua di costituzione:

H ² O a 110°	0,19
H ² O sopra 110°	1,58
SiO ²	56,27
Al ² O ³	18,67
Fe ² O ³	5,74
FeO	1,58
CaO	4,47
MgO	1,44
K ² O	5,03
Na ² O	4,65
Ph ² O ⁵	tracce
Cl.	tracce
	<hr/>
	99,62

Da questa analisi si deduce:

SiO ²	57,50	0,9519	0,9519	0,9519
Al ² O ³	19,08	0,1866	} 0,2232	} 0,2232
Fe ² O ³	5,87	0,0366		
FeO	1,62	0,0225	} 0,1405	} 0,2716
CaO	4,57	0,0816		
MgO	1,47	0,0364		
K ² O	5,14	0,0545		
Na ² O	4,75	0,0766	} 0,1311	
	100,00			

$$9,5 \text{ SiO}^2; 2,2 \text{ R}^2\text{O}^3; 2,7 \bar{\text{R}}\text{O}, \text{ ovvero } 4,3 \text{ SiO}^2; \text{R}^2\text{O}^3; 1,2 \bar{\text{R}}\text{O}$$

$$\alpha = 2,02; \beta = 52$$

$$\text{R}^2\text{O} : \text{RO} = 1 : 1,1; \text{K}^2\text{O} : \text{Na}^2\text{O} = 1 : 1,4$$

Tutte quindi le scorie diversamente colorate del cratere del Fondo Riccio sono simili fra di loro e tutte, stando ai caratteri mineralogici, sono riferibili al tipo delle rocce trachitiche ad augite ed egrina con marcato carattere alcalino. Ma ove si dia maggiore importanza ai caratteri chimici che ai caratteri mineralogici, come il Loewinson-Lessing propone (¹), le scorie studiate differiscono un poco dalle comuni trachiti (rocce neutre o mesiti a magma alcalino) e differiscono pure dalle andesiti (esse pure rocce neutre o mesiti a magma alcalino terroso); alle quali ultime potrebbero ravvicinarsi in certo modo per la prevalenza del feldispato sodico-calcico sul feldispato alcalino. Esse si avvicinano invece alle rocce intermedie alle trachiti e alle andesiti (rocce basiche o basiti a magma intermedio). Infatti per le scorie studiate si ha:

	Formula magmatica	α	β	R ² O:RO	Na ² O:K ² O
Scoria nera della Concola	4,5 SiO ² R ² O ³ 1,5 $\bar{\text{R}}\text{O}$	2,00	56	1:1,2	1:1,1
Scoria nera di Moscaglione	4,1 SiO ² R ² O ³ 1,4 $\bar{\text{R}}\text{O}$	1,87	59	1:1,5	1:1
Scoria rossa della Concola	4,3 SiO ² R ² O ³ 1,3 $\bar{\text{R}}\text{O}$	1,98	54	1:1	1:1
Scoria grigio-cinerea della Concola .	4,3 SiO ² R ² O ³ 1,2 $\bar{\text{R}}\text{O}$	2,02	52	1:1,1	1,4:1
Media	4,3 SiO ² R ² O ³ 1,4 $\bar{\text{R}}\text{O}$	1,97	55	1:1,2	1,1:1

(¹) *Note sur la classification et la nomenclature des roches éruptives*. Compte Rendu du Congrès géologique international, VII session, pag. 52. St. Pétersbourg, 1897; *Studien über die Eruptivgesteine*, id. id. id, pag. 193.

e il Loewinson-Lessing dà:

	Formula magmatica	α	β	$R^2O : RO$
Trachiti	$5,2 \text{ SiO}_2 \text{ R}^2\text{O}^2 \text{ 1,25 RO}$	2,42	44	1:1,1
Trachiti-Andesiti.	$4,46 \text{ SiO}_2 \text{ R}^2\text{O}^2 \text{ 1,4 RO}$	2,07	53	1:1
Andesiti.	$5,2 \text{ SiO}_2 \text{ R}^2\text{O}^2 \text{ 1,7 RO}$	2,20	50	1:2,8

Ma si considerino esse rocce come dei vetrofiri trachitici, ovvero come vetrofiri trachitico-andesitici, sembrami in ogni modo che esse siano del tutto simili alle rocce del cratere scoriaceo centrale degli Astroni descritte dal Pampaloni ⁽¹⁾ e da lui riferite al tipo delle trachiti augitiche e riportate invece dal Rosenbusch ⁽²⁾ al tipo delle trachiti ad augite ed egirina.

Tufo giallo pisolitico.

Il tufo giallo del Fondo Riccio è costituito da un vetro giallo-grigiastro, assai compatto, che fa da cemento a delle piccole pisoliti quasi arrotondate, nerastre, picee, misuranti uno o due centimetri nel loro maggiore diametro. È più abbondante però la materia giallognola terrosa avvolgente delle pisoliti stesse.

L'analisi chimica qualitativa, che io feci completa di questo tufo del Fondo Riccio, diede più abbondante di tutte la reazione della silice, indi dell'allumina, minore dell'ossido ferroso, dell'ossido ferrico, della calce, della potassa, della soda, minore ancora della magnesia e dell'acqua; diede infine soltanto tracce di cloro, di anidride carbonica e di anidride fosforica.

Le sezioni sottili di questo tufo, osservate al microscopio apparvero costituite principalmente da un vetro pochissimo poroso, grigio-giallognolo, e impregnato molto debolmente di carbonato calcico, come dimostrano le sole tracce avute di anidride carbonica. In mezzo al vetro sono rari i microliti di augite, rarissimi quelli di feldispato prevalentemente alcalino, le laminette di biotite e i trichiti o altre forme filamentose simili. Tal vetro fa da cemento alle pisoliti, le quali sono molto più porose della materia avvolgente e sono costituite esse pure da un vetro grigio-nero, o grigio-giallognolo se osservato in sezioni molto sottili, e da pochi cristallotti microlitici di augite e da pochissimi di biotite e di feldispato alcalino.

Come minerali porfirici inclusi nella sostanza cementizia vanno annoverati il sanidino, l'anortose, il plagioclasio, la biotite, l'augite, l'egirina, la

⁽¹⁾ *Le rocce trachitiche degli Astroni nei Campi Flegrei. I. Rocce del cratere scoriaceo centrale.* Rendiconti R. Acc. dei Lincei, serie 5^a, vol. VIII, fasc. 2^o, pag. 86, 1899.

⁽²⁾ *Mikrosk. Physiogr. d. Massigen Gesteine*, pag. 750, Stuttgart, 1896.

sodalite, la magnetite. L'ematite e la limonite vi si trovano come prodotti di decomposizione. In tutti poi i minerali porfirici abbondano in generale le inclusioni vetrose e scarseggiano quelle di apatite.

Più frequente è il feldispato alcalino, in parte anortose, in parte sanidino, il quale ora è in cristalli a contorni ben netti e spesso geminati con la legge di Carlsbad, ora in frammenti cristallini irregolari. Molto più scarso è il feldispato calcico-sodico e, sembrami, di varia acidità, con prevalenza di termini piuttosto basici. L'augite, verde, in prismetti e in frammenti irregolari, è frequente; talora è associata al plagioclasio, e spesso è circondata e frammezzata da magnetite, la quale anche si trova in grosse sezioni di cristalli. L'ematite e la limonite sono secondarie; quest'ultima è frequente quasi quanto la magnetite. L'egirina in lamine isolate e la biotite sono più scarse dell'augite. Scarsissima è la sodalite, cui riferisco un cristallo incolore, isotropo, quasi quadrato e della cui presenza fa fede il saggio chimico che ha dato reazione di cloro, sebbene in minime tracce.

In conclusione il tufo pisolitico giallo del Fondo Riccio, per la presenza di tutti questi minerali sopra descritti, risulta costituito dagli stessi materiali dei vetrofiri ed anche, può fin da ora dirsi, delle rocce ipocristalline e pure di natura trachitica che vi sono incluse, e di cui sarà detto in altra prossima Nota; materiali uniti in un impasto che si è poi alterato più o meno per azioni secondarie.

Chimica. — Determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili. Comportamento di alcune cloroanidridi inorganiche. Nota IV ⁽¹⁾ di G. ODDO, presentata dal Socio PATERNÒ.

Nel lavoro sulle cloroanidridi inorganiche, eseguito in parte in collaborazione col dott. Serra ⁽²⁾, abbiamo osservato che alcune di esse in soluzione hanno un peso molecolare variabile con la natura del solvente e la temperatura. Ricontrammo questo fenomeno in modo notevole nell'ossicloruro di fosforo, per il quale col metodo ebullioscopico in soluzione nel tetraclometano e nel benzolo ottenemmo dei valori corrispondenti quasi alla formola doppia; e valori alquanto più bassi nel solfuro di carbonio (p. e. 47°); mentre nel cloroformio (p. e. 63°) e nell'etere ricavammo risultati corrispondenti alla formola semplice; similmente valori per la formola semplice ottenemmo nelle soluzioni benzoliche col metodo crioscopico. Paragonammo quindi questo

⁽¹⁾ V. pag. 85.

⁽²⁾ Gazz. chim. ital. 1899, II, 318 e Rend. Acc. Lincei 1899, 244.

fenomeno di polimerizzazione che avviene all'ebollizione alla condensazione riscontrata crioscopicamente nei composti ossidrilati organici in soluzione nei solventi esenti d'ossidrile, come il benzolo; e io poi, in alcune ricerche chimiche ⁽¹⁾ dimostrarai come, sostituendo agli atomi di cloro dell'ossicloruro dei radicali organici positivi (anilidi), o negativi (esteri dei fenoli), nei primi derivati soltanto si manifesta la tendenza alla condensazione, ma questa non dà mai origine a prodotti a molecola doppia stabile, se si eccettua forse l'ossifosfazobenzolanilide, della quale però i caratteri di solubilità, mentre fanno ammettere la condensazione, impediscono di poterla dimostrare sperimentalmente.

Di altre cloroanidridi studiammo il comportamento ebullioscopico, ma con risultati poco soddisfacenti: quasi per tutte ottenemmo grandezze molecolari superiori alle calcolate per la molecola semplice; ma se per l'ossicloruro di fosforo l'intensità del fenomeno e il comportamento rispetto ai diversi solventi e segnatamente al cloroformio e al solfuro di carbonio ci fece ritenere senza esitanza che una polimerizzazione parziale realmente avvenisse, sugli altri risultati sollevammo dei dubbî; scrivemmo esplicitamente ⁽²⁾, « Con altre cloroanidridi abbiamo ottenuto dei risultati i quali possono far supporre finora che avvenga soltanto polimerizzazione parziale a caldo, che varia alquanto con la natura del solvente. Diciamo finora, perchè i valori dei pesi molecolari che pubblichiamo sono stati calcolati secondo la nota formola

$$M = \frac{C \cdot K}{I} .$$

In una prossima comunicazione dimostreremo quale sia il valore della tensione di vapore parziale delle singole sostanze disciolte, alla temperatura di ebollizione delle soluzioni usate, e, introducendo questa correzione, indicheremo i risultati definitivi. Si può prevedere però fin da ora che per alcuni di essi la correzione d'apportare sarà quasi trascurabile, poichè W. Nernst ⁽³⁾ con soluzioni di benzolo e cloroformio in etere trovò che il peso molecolare osservato supera quello corretto soltanto dal 10 al 20 %.

I risultati che ho ora ottenuto in parte collimano con queste nostre previsioni, in parte le hanno sorpassate: resta però confermato il fatto che alcune cloroanidridi e più di tutto finora l'ossicloruro di fosforo in alcune soluzioni bollenti tendono a polimerizzarsi.

In tutte l'esperienze riportate nelle tavole, la cloroanidride distillata col solvente veniva decomposta con acqua a temperatura ordinaria e, scacciato

(1) Gazz. chim. ital. 1899, II, 330.

(2) L. c.

(3) Zeits. phys. Chemie 8, 129.

$$T = 52,6; \quad \text{POCl}_3 = 153,5$$

		Determinazioni			
		I	II	III	IV
Frazione distillata	peso	4,6620	3,9516	4,0966	5,1878
	ossicloruro in essa contenuto	0,0327	0,0411	0,0462	0,0790
	solvente.	4,6293	3,9105	4,0504	5,1088
	concentrazione (g_1)	0,7063	1,0510	1,1406	1,5463
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,4662	2,3869	2,9508	4,1322
	" finale	1,6435	2,6369	3,2874	4,8286
	media (g_2)	1,55485	2,5119	3,1191	4,4804
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,45	0,41	0,365	0,34
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,221	0°,356	0°,391	0°,570
	" finale	0,243	0,387	0,481	0,678
	media (Δ)	0,232	0,372	0,436	0,624
Molecola	osservata	352	355	376	378
	corretta	194	210	239	250

I valori ottenuti da me per la molecola osservata coincidono quasi del tutto con quelli precedentemente da noi pubblicati. Quantunque la correzione che in essi s'introduce sia molto elevata, tuttavia riesce evidente il fenomeno della condensazione, che cresce coll'aumentare della concentrazione.

$$r = 26,7 \quad ; \quad POCl_3 = 153,5$$

		Déterminazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	{ peso ossicloruro in essa contenuto	1,9844	2,0506	2,1661
	{ solvente " " " " " "	0,0056	0,0138	0,0207
	{ concentrazione (g_1) " " " "	1,9788	2,0368	2,1454
Soluzione bollente	{ a concentrazione iniziale finale	0,2829	0,6775	0,9648
	{ " " " " " "	0,9893	2,0702	3,3240
	{ media (g_2) " " " "	1,1037	2,3093	3,8021
		1,0465	2,18975	3,56305
$g_1 = \alpha$		0,27	0,31	0,27
g_2				
Inalzamento del punto d'ebollizione	{ a concentrazione iniziale finale	0°,080	0°,163	0°,290
	{ " " " " " "	0, 094	0, 188	0, 320
	{ media (d) " " " "	0, 087	0, 176	0, 305
Molecola	{ osservata	321	332	312
	{ corretta	234	229	228

I risultati dell'altra memoria oscillavano tra 283 e 309, molecola non corretta.

È degno di nota che la volatilità dell'ossicloruro in questo solvente (p. e. 80,5) è inferiore che nel tetraclorometano (p. e. 78,5).

Ossicloruro di fosforo in cloroformio.

$\Gamma = 36,6$; $\text{POCl}_3 = 153,5$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,1953	7,1742	4,3812
	ossicloruro in essa contenuto	0,0024	0,0081	0,0078
	solvente	4,1929	7,1661	4,3734
	concentrazione (g_1)	0,0572	0,1130	0,1783
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,7673	2,5866	6,2765
	" finale	2,0137	3,3207	7,3866
	media (g_2)	1,8905	2,9536	6,8315
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,03	0,038	0,026
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,410	0°,560	1°,372
	" finale	0,448	0,760	1,690
	media (Δ)	0,429	6,660	1,531
Molecola	osservata	161	163	163
	corretta	153	156,8	158,7

Risulta da quest'esperienze che l'ossicloruro di fosforo è molto volatile in CCl_4 e lo è pochissimo in CHCl_3 , quantunque questi due solventi abbiano costituzione paragonabile e il loro punto d'ebollizione non differisca che di 15°,5.

Non avendo a mia disposizione del solfuro di carbonio e per la difficoltà di poterlo avere in questa città prima delle vacanze estive, non ne ho potuto ripetere l'esperienze, quantunque presentassero un certo interesse; difatti, mentre in cloroformio (p. e. 63°) si ottengono, come abbiamo visto anche a molecola non corretta valori corrispondenti alla formola semplice, in solfuro di carbonio, che bolle a temperatura alquanto più bassa (47°), abbiamo ottenuto cifre molto più elevate (da 214 a 239).

Ho creduto inutile ripetere l'esperienze in etere, avendo ricavato, nelle determinazioni pubblicate, risultati che corrispondono alla molecola semplice.

Cloruro di tionile in cloroformio.

$\Gamma = 36,6$; $\text{SOCl}_2 = 119$

		Determinazioni		
		I	II	III
Frazione distillata	peso	4,1308	2,7328	2,4752
	cloruro di tionile in essa contenuto	0,0359	0,0322	0,0375
	solvente	4,0949	2,7006	2,4377
	concentrazione (g_1)	0,8767	1,1923	1,5383
Soluzione bollente	concentrazione iniziale	1,5725	2,2455	3,3410
	" finale	1,6963	2,3429	3,5491
	media (g_2)	1,6344	2,2942	3,44505
$\frac{g_1}{g_2} = \alpha$		0,53	0,52	0,44
Inalzamento del punto d'ebollizione	a concentrazione iniziale	0°,207	0°,297	0°,370
	" finale	0,235	0,307	0,426
	media (Δ)	0,221	0,302	0,398
Molecola	osservata	271	278	316
	corretta	127	134	177

sia in tetraclorometano che in benzolo mostra debbole tendenza a polimerizzarsi, che aumenta anche lentamente col crescere della concentrazione.

CONCLUSIONI.

Riassumo i risultati definitivi di tutte le ricerche descritte in questa e nelle quattro note precedenti che ho citato a principio di questo lavoro.

1°. L'iodio nelle soluzioni bollenti in solfuro di carbonio, benzolo e alcool etilico mostra molecole biatomiche; invece in cloroformio e tetraclorometano assieme alle biatomiche conserva molecole tetraatomiche. Il numero degli atomi che costituiscono le molecole e si rivelano ebullioscopicamente, sembra non abbia alcuna influenza sulla colorazione della soluzione; difatti questa è violetta sia nel solfuro di carbonio che nel cloroformio e nel tetraclorometano.

2°. Una proprietà quasi analoga a quella dell'iodio mostrano alcune anidridi alogenate inorganiche: in parecchi solventi all'ebollizione tendono a polimerizzarsi: ciò avviene principalmente con l'ossicloruro di fosforo in tetraclorometano e benzolo; meno col cloruro di tionile in cloroformio, con l'ossibromuro e il solfocloruro di fosforo in benzolo; molto poco col protocloruro di zolfo in tetraclorometano e benzolo.

È degno di nota che crioscopicamente tutte queste anidridi in soluzione nel benzolo mostrano molecola semplice, anche a concentrazioni alquanto elevate. È una polimerizzazione molto labile che avviene quindi in condizioni speciali di temperatura e di soluzione.

Molecola semplice col metodo crioscopico in benzolo mostrano il cloruro di cromile e di solforile, che non si prestano per lo studio ebullioscopico.

3°. Sostituendo nell'ossicloruro di fosforo gli atomi di cloro con i radicali $C_6H_5.NH-$ e $C_6H_5.O-$ non si riesce ad isolare dei derivati della forma polimerica. La fosfossibicloromonoanilide $C_6H_5.NH.POCl_2$ mostra in benzolo sia col metodo crioscopico che con l'ebullioscopico notevole tendenza a polimerizzarsi; nulla posso dire della bi- e trianilide, perchè poco solubili in questo solvente. Nell'alcool etilico col metodo ebullioscopico la prima mostra molecola semplice, ma reagisce col solvente; la seconda fornisce dei valori superiori a quelli calcolati per la molecola semplice.

Per tutti i suoi caratteri fisici (punto di fusione, solubilità ecc.) e anche chimici debbo ritenere come derivato di una forma polimerica dell'ossicloruro

(forse la dimera) l'ossifosfoazobenzolanilide $C_6H_5.N \begin{matrix} \searrow \\ PO \\ \nearrow \end{matrix} C_6H_5.NH'$, descritta la

prima volta da A. Michaelis e Silberstein; e similmente il fosfonitrile di Gladstone, al quale si è attribuito finora la formula semplice NPO ; ma appunto per la mancanza d'un solvente, non si riesce a determinare nè nell'uno nè nell'altro la grandezza molecolare.

Gli eteri fenolici $C_6H_5O \cdot POCl_2$ e $(C_6H_5O)_3PO$, i soli che si riesca ad ottenere puri, anche nel benzolo bollente, al contrario delle anilidi, mostrano molecola semplice.

4°. Lo zolfo in tetraclorometano col metodo ebullioscopico mostra la molecola costituita da otto atomi.

5°. Il pentacloruro di fosforo nel medesimo solvente e pure col metodo ebullioscopico, mostra molecola semplice.

6°. Il protocloruro e il tricloruro di iodio in soluzione nel tetraclorometano invece di farne innalzare il punto d'ebollizione lo abbassano, perchè si dissociano.

7°. Dirò finalmente che questo lavoro ci ha permesso di modificare alcuni processi di preparazione di cloroanidridi e trovarne qualche altro ⁽¹⁾ nuovo; ho potuto semplificare, come risulta da questa memoria, il metodo per la determinazione del peso molecolare col metodo ebullioscopico nelle sostanze volatili; e trovare altri fatti nuovi, come l'azione clorurante d'un miscuglio d'ossicloruro di fosforo e clorato potassico, l'eliminazione di HCl dalle monoanilidi $R \cdot NH \cdot POCl_2$ con formazione di una nuova classe di corpi; fatti quest'ultimi che non mancherò di studiare estesamente, quando i mezzi e gli aiuti necessari me lo permetteranno.

PRESENTAZIONE DI LIBRI

Il Segretario CERRUTI presenta le pubblicazioni giunte in dono, segnalando quelle dei Soci RIGHI ed ABETTI, ed un lavoro a stampa del professore GINO LORIA, avente per titolo: *Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche*.

CORRISPONDENZA

Il Segretario CERRUTI dà conto della corrispondenza relativa al cambio degli Atti.

Ringraziano per le pubblicazioni ricevute:

La Società italiana delle scienze (detta dei XL) di Roma; la R. Accademia delle scienze di Lisbona; la R. Accademia di scienze ed arti di Barcellona; la R. Società zoologica di Amsterdam; la Società di scienze naturali di Emden; la Società zoologica di Tokyo; le Società geologiche di Manchester e di Sydney; la R. Scuola Navale superiore di Genova; il R. Istituto Geodetico di Potsdam.

Annunciano l'invio delle proprie pubblicazioni:

La Società geologica di Calcutta; le Università di Groningen, di Marburg e di Greifswald.

(¹) Gazz. chim. ital. 1899 (II) 333 e 355.

OPERE PERVENUTE IN DONO ALL'ACCADEMIA

presentate nella seduta del 2 febbraio 1902.

- Abetti A.* — Galileo in Arcetri. Firenze, 1901. 8°.
- Id.* — L'Osservatorio astronomico di Arcetri. Appunti storici ed illustrazioni. Firenze, 1901. 4°.
- Boffito G.* — Intorno alla « Quaestio de aqua & terra » attribuita a Dante. Memoria I. La controversia dell'acqua e della terra prima e dopo Dante. Torino, 1902. 2°.
- Brough B. H.* — The Scarcity of Coal. London, 1900. 8°.
- Chantre E.* — Les Barabra. Esquisse ethnographique et anthropométrique. Lyon, 1901. 8°.
- Id.* — Les Bédouins d'Égypte. Esquisse ethnographique et anthropométrique. Lyon, 1901. 8°.
- Della Rovere D.* — De l'infection des animaux à sang froid par le bacille ictérode. Paris, 1901. 8°.
- Fritzsche H.* — Die Tägliche Periode der Erdmagnetischen Elemente. St. Petersburg, 1902. 8°.
- Kölliker A. v.* — Ueber einen noch unbekannten Nerven-Zellenkern im Rückenmark der Vögel. Wien, 1901. 8°.
- Loria G.* — Eugenio Beltrami e le sue opere matematiche. Leipzig, 1891. 8°.
- Marson L.* — Nevai di circo e tracce carsiche e glaciali nel Gruppo del Cavallo. Milano, 1901. 8°.
- Nordhavs-Expedition (Den Norske). XXVIII Zoologi. Mollusca III ved H. Friele og J. A. Grieg. Christiania, 1901. 4°.
- Passerini N.* — Sui tubercoli radicali della *Medicago sativa* L. Firenze, 1901. 8°.
- Righi A.* — Sulla questione del campo magnetico generato dalla convezione elettrica e su altre analoghe questioni. Pisa, 1901. 8°.
- Tommasina Th.* — Sur l'auscultation des orages lointains et sur l'étude de la variation diurne de l'électricité atmosphérique. Paris, 1901. 4°.
- Id.* — Sur l'existence de rayons qui subissent la réflexion dans le rayonnement émis par un mélange de chlorures de radium et de baryum. Paris, 1901. 4°.
- Watzof S.* — Tremblements de terre en Bulgarie au XIX siècle. Sofia, 1902. 8°.

V. C.